# Numerik für Differenzialgleichungen

Sommersemester 2017

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. S. Hertzog

Informationen und aktuelle Hinweise zur Vorlesung finden Sie im Internet unter
`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss17/ndgln` .

## Übungsblatt 5

**Aufgabe 5.1** (3 Punkte) Bestimmen Sie die maximale Zahl $p \in \mathbb{N}$, sodass die Identitäten

$$\sum_{\ell=0}^{m} \alpha_\ell = 0, \quad \sum_{\ell=0}^{m} \left(\alpha_\ell \ell^q - \beta_\ell q \ell^{q-1}\right) = 0, \quad q = 1, 2, \ldots, p,$$

für das Adams-Bashforth- und das Adams-Moulton-Verfahren mit $m = 3$ beziehungsweise $m = 2$ gelten.

**Aufgabe 5.2** (3 Punkte) Leiten Sie unter Verwendung der uniformen Lipschitzeigenschaft der Funktion $f$ eine hinreichende Bedingung für die Wohldefiniertheit des Adams-Moulton-Verfahrens her.

**Aufgabe 5.3** (3 Punkte) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des *leap-frog*-Verfahrens einerseits direkt mit einer Fehlerabschätzung für die Approximation der Zeitableitung mittels $y'(t_k) \approx (y(t_{k+1}) - y(t_{k-1}))/(2\tau)$ und andererseits durch Überprüfen des allgemeinen Konsistenzkritieriums für Mehrschrittverfahren.

**Aufgabe 5.4** (3 Punkte) Für $(\alpha_\ell)_{\ell=0,\ldots,m}$ mit $\alpha_m = 1$ betrachten wir die lineare homogene Differenzengleichung

$$\sum_{\ell=0}^{m} \alpha_\ell y_{k+\ell} = 0.$$

(i) Zeigen Sie, dass zu $m$ Startwerten $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1} \in \mathbb{R}$ genau eine Folge $(y_k)_{k\geq 0}$ existiert, welche die homogene Differenzengleichung löst.
(ii) Zeigen Sie, dass die homogene Differenzengleichung $m$ linear unabhängige Lösungen $(y_k)_{k\geq 0}$ besitzt.

**Aufgabe 5.5** (4 Punkte) Die Funktion $f \in C^1([0,T] \times \mathbb{R})$ erfülle $|\partial_z f(t,z)| \leq C$ für alle $(t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Adams-Moulton-, Adams-Bashforth-, und Adams-Bashforth-Moulton-Verfahren die Bedingungen der allgemeinen Konvergenzaussage für Mehrschrittverfahren erfüllen.

**Abgabe:** Am Mittwoch, den 5. Juli 2017, zu Beginn der Vorlesung.